**Integralrechnung**

Integration

Eine Funktion f : [a, b] → *R* ist eine Treppenfunktion, wenn es eine Zerlegung a = x0 < x1 < . . . < xk−1 < xk = b und Konstanten c1, . . . , ck gibt, so dass f(x) = ci für x ∈ (xi−1, xi).

Für eine positive Treppenfunktion f kann man das geometrische Integral, das ist die Fläche zwischen der Funktion und der x-Achse auf [a, b] wie in Abbildung 4.1.2 leicht angeben:

Ein Bild, das Text, Uhr enthält.

Automatisch generierte Beschreibung

Nullmengen

Ein Bild, das Uhr enthält.

Automatisch generierte BeschreibungEine Menge M ⊂ R heißt Nullmenge, wenn es zu jedem ε > 0 abzählbar viele Intervalle Jn gibt, deren Vereinigung M überdecken Ein Bild, das Text enthält.

Automatisch generierte Beschreibung und die Länge aller Intervalle in der Summe kleiner als ε ist, also

Monotonie

Eine Folge von Treppenfunktionen (fi) auf [a, b] ist monoton steigend, wenn für alle x ∈ [a, b] die Ungleichung fi+1(x) ≥ fi(x) gilt.

Die Funktionsfolge von Treppenfunktionen (fi) konvergiert fast überall punktweise gegen die Funktion f, wenn es eine Nullmenge M gibt, so dass für alle x ∈ [a, b]\M der Grenzwert lim i→∞ fi(x) = f(x) ist.

Lebesgue-Integral

Sei I = (a, b) ⊂ R ein Intervall. Dann bezeichnet L↑(I) die Menge der Funktionen, die fast überall punktweise Grenzwert einer monoton steigenden Folge von Treppenfunktionen (fi↑) sind, für die die Integralfolge  konvergiert. Für f ∈ L ↑ (I) sei dann Ein Bild, das Text, Uhr enthält.

Automatisch generierte Beschreibung

Ein Bild, das Text enthält.

Automatisch generierte Beschreibung

Stammfunktionen

1. Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung

Die Funktion F : [a, b] → R mit Ein Bild, das Text, Uhr, Messanzeige enthält.

Automatisch generierte Beschreibung mit einer stetigen Funktion f : [a, b] → R ist  
 auf (a, b) stetig differenzierbar und es gilt für alle x ∈ (a, b) F‘(x) = f(x).

Ein Bild, das Tisch enthält.

Automatisch generierte Beschreibung

Sei f : (a, b) → R. Jede Funktion F : (a, b) → R mit F‘ = f ist eine Stammfunktion von f.

(nur bis auf eine Integrationskonstante eindeutig ist. Dies wird so geschrieben:)

Ein Bild, das Text enthält.

Automatisch generierte Beschreibung

2. Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung

Ein Bild, das Text enthält.

Automatisch generierte Beschreibung Ist F : [a, b] → R eine stetige und stetig differenzierbare Funktion und die Ableitung F‘ auf  
 (a,b) integrierbar, also F‘ ∈ L((a, b)), so ist

Integrationsregeln

Grundlegende Techniken:  
- Linearität ausnutzen  
- grundlegende Definitionen oder bekannte Identitäten verwenden

Logarithmisches Integral. Für eine integrierbare und differenzierbare Funktion f gilt:



Partialbruchzerlegung

1. Ist der Grad des Zählers höher als der des Nenners, so wird eine Polynomdivision durchgeführt. Alle ungebrochenen Anteile können direkt integriert werden.
2. Der Nenner wird in seine Nullstellen oder quadratischen Anteile faktorisiert.
3. Es wird der Partialbruch-Ansatz mit Unbekannten aufgestellt:
   1. Quadratische Faktoren im Nenner erhalten einen Partialbruch mit Koeffizienten Ax+B im Zähler
   2. Nullstellen erhalten nach Vielfachheit jeweils für jede Ordnung einen Bruch mit einzelnen Koeffizienten
4. Die Partialbrüche werden durch Erweitern addiert und der Koeffiziententerm wird mit dem Ergebnis nach Schritt 1 verglichen, und die Koeffizienten identifiziert.
5. Elementare Integration der einzelnen Summanden

Integration durch Substitution

Für eine integrierbare Funktion f und eine differenzierbare und umkehrbare Funktion u gilt:

Ein Bild, das Text enthält.

Automatisch generierte Beschreibung

Partielle Integration

Für differenzierbare und integrierbare Funktionen u und v gilt:

Ein Bild, das Text enthält.

Automatisch generierte Beschreibung